ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

1ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$.
α) Αν η f είναι 1–1 να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στον X.
β) Αν η f δεν είναι 1–1 να δειχθεί ότι η ρ δεν είναι μετρική στον X.

2) α) Αν ο ρ είναι μια μετρική στο X, να δείξετε ότι η $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}$ είναι επίσης μετρική στον X.
β) Να δείξετε ότι δεν ισχύει γενικά ότι αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε η $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = (\rho(x, y))^2$ είναι μετρική στον X.

3) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $(X_i, \rho_i)_{i=1}^k$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$X = \prod_{i=1}^{k} X_i = \{(x_1, \ldots, x_k) : \ x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, k\}$$

και τη $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\rho\Big((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)\Big) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i).$$

α) Να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στο X.
β) Αν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στον X με $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k)$, $n = 1, 2, \ldots$ και $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^k) \in X$, να δείξετε ότι $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$ αν και μόνο αν $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ για $i = 1, \ldots, k$.

4) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x, y \in X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες στο X με $x_n \to x$ και $y_n \to y$. να δειχθεί ότι $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

5) Αν (X, ρ) είναι μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες στο X και $x \in X$ ώστε $\rho(x_n, y_n) \to 0$ και $x_n \to x$, να δείξετε ότι $y_n \to x$.

6) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $x \in X$. Να δείξετε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει περεταίρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

7) Έστω (X, ρ), (Y, d) δυο μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση και $x \in X$. Αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \to x$ η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y, d), να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x.

8) Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου (X, ρ), $x_1, x_2 \in X$ και $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x_2, \varepsilon_2)$ να είναι γνήσιο υποσύνολο της ανοικτής μπάλας $B_\rho(x_1, \varepsilon_1)$.

9) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του X. Να δείξετε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_1, \ldots, U_n$, ξένα ανά δύο με $x_i \in U_i$ για $i = 1, \ldots, n$.